

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА СЛІДКУЮЧОГО ПРИВОДУ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Кудін В.Ф., проф.; Нікітенко О.В., студент

кафедра автоматизації електромеханічних систем та електроприводу

Ставиться задача пошуку закону оптимального керування об'єктом сліdkуючого приводу методом динамічного програмування Беллмана. Регулятор має забезпечувати мінімальну енергію керування та високі показники якості перехідного процесу. Структурна схема досліджуваної САК має

вигляд:

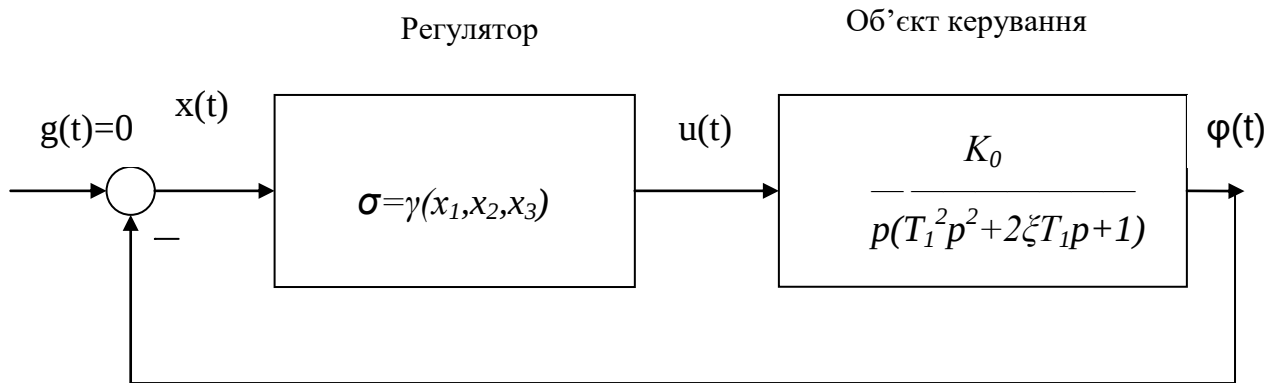


Рисунок 1 – Структурна схема САК

$$K_0 = 30;$$

$$x_{1m} = 0.1 \text{ рад};$$

$$x_1 = \varphi;$$

$$T_1 = 0.05 \text{ с};$$

$$x_{2m} = 3 \text{ рад};$$

$$x_2 = \dot{\omega} = \dot{\varphi};$$

$$\xi = 0.68;$$

$$\sigma_m = 10 \text{ В};$$

$$x_3 = \ddot{\varphi};$$

Математична модель електропривода запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_1 x_3 - a_2 x_2 + b u \end{cases} \quad \text{де } a_1 = \frac{2\xi}{T_1}; \quad a_2 = \frac{1}{T_1^2}; \quad b = \frac{K_0}{T_1^2}; \quad (1)$$

Оберемо неквадратичний критерій оптимальності виду:

$$\min_u I = \int_0^\infty (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_1^4 + \alpha_5 x_2^4 + \alpha_6 x_3^4 + c u^2) dt$$

Тут $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c$ - вагові константи, x_1, x_2, x_3 - фазові змінні стану.

Запишемо функціональне рівняння Беллмана для заданої системи диференціальних рівнянь та обраного критерію оптимальності:

$$\begin{aligned} \min_u [\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_1^4 + \alpha_5 x_2^4 + \alpha_6 x_3^4 + c u^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 + \\ + \frac{\partial V}{\partial x_3} (-\alpha_1 x_3 - \alpha_2 x_2 + b u)] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Візьмемо похідну по u :

$$2cu + b \frac{\partial V}{\partial x_3} = 0, \quad u = -\frac{b}{2c} \frac{\partial V}{\partial x_3}$$

Підставимо u в рівняння (2) :

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_1^4 + \alpha_5 x_2^4 + \alpha_6 x_3^4 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} (-\alpha_1 x_3 - \alpha_2 x_2) = \frac{b^2}{4c} \left(\frac{\partial V}{\partial x_3} \right)^2 \quad (3)$$

Це рівняння називають рівнянням Гамільтона-Якобі або рівнянням в частинних похідних. Воно задовольняється функцією Беллмана в формі степеневого ряду виду:

$$V(x_1, x_2, x_3) = v^2(x_1, x_2, x_3) + v^4(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Тут $v^2(x_1, x_2, x_3) = k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2 + k_{33}x_3^2 + 2(k_{12}x_1x_2 + k_{13}x_1x_3 + k_{23}x_2x_3)$ -

квадратична форма, а четвертинна форма:

$$v^4(x_1, x_2, x_3) = K_1x_1^4 + 4K_2x_1^3x_2 + 4K_3x_1^3x_3 + 6K_4x_1^2x_2^2 + 12K_5x_1^2x_2x_3 + 6K_6x_1^2x_3^2 + \\ + 4K_7x_1x_2^3 + 12K_8x_1x_2^2x_3 + 12K_9x_1x_2x_3^2 + 4K_{10}x_1x_3^3 + K_{11}x_2^4 + 4K_{12}x_2^3x_3 + 6K_{13}x_2^2x_3^2 + \\ + 4K_{14}x_2x_3^3 + K_{15}x_3^4$$

Візьмемо частинні похідні від квадратичної форми та підставимо їх в рівняння (2). Отримаємо систему рівнянь Ріккаті для визначення параметрів квадратичної форми.

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2(k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3) + 2(k_{12}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3) + \\ + 2(k_{13}x_1 + k_{23}x_2 + k_{33}x_3) \cdot (-a_{23}x_2 - a_{33}x_3) = \frac{b^2}{4c} \cdot [2(k_{13}x_1 + k_{23}x_2 + k_{33}x_3)]^2;$$

$$x_1^2: \quad \alpha_1 - \frac{b^2 k_{13}^2}{c} = 0$$

$$x_2^2: \quad \alpha_2 + 2k_{12} + 2k_{23}\alpha_{32} - \frac{b^2 k_{23}^2}{c} = 0$$

$$x_3^2: \quad \alpha_3 + 2k_{23} + 2k_{33}\alpha_{33} - \frac{b^2 k_{33}^2}{c} = 0$$

$$x_1x_2: \quad k_{11} + k_{13}\alpha_{32} - \frac{b^2 k_{13}k_{23}}{c} = 0$$

$$x_1x_3: \quad k_{12} + k_{13}\alpha_{33} - \frac{b^2 k_{13}k_{33}}{c} = 0$$

$$x_2x_3: \quad k_{13} + k_{22} + k_{33}\alpha_{32} + k_{23}\alpha_{33} - \frac{b^2 k_{23}k_{33}}{c} = 0$$

Вагові константи функціонала знаходять, користуючись наступним співвідношенням:

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{x_{i\max}} \right)^2 \quad c = \left(\frac{1}{\sigma_{\max}} \right)^2$$

Виходячи з постановки задачі маємо:

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{x_{1m}} \right)^2 = \left(\frac{1}{0.1} \right)^2 = 100; \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{x_{2m}} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = 0.1111;$$

$$c = \left(\frac{1}{\sigma_m} \right)^2 = \left(\frac{1}{10} \right)^2 = 0.01; \quad b = \frac{K_0}{T_1^2} = \frac{30}{0.05^2} = 12000;$$

$$a_{33} = -\frac{2\xi}{T_1} = -\frac{2 \cdot 0.68}{0.05} = -27.2; \quad a_{32} = -\frac{1}{T_1^2} = -\frac{1}{0.05^2} = -400;$$

$$a_1 = \frac{2\xi}{T_1} = \frac{2 \cdot 0.68}{0.05} = 27.2; \quad a_2 = \frac{1}{T_1^2} = \frac{1}{0.05^2} = 400; \quad b_3 = b = 12000.$$

Розв'язуємо систему рівнянь Ріккати в MathCad v.14, знаходимо невідомі коефіцієнти квадратичної форми. Обираємо ті значення коефіцієнтів, що задовольняють критерію Сільвестра. Маємо матрицю рішень системи рівнянь Ріккати. З цих рішень вибираємо те, що задовольняє критерій Сильвестра і гарантують додатню знаковизначеність функції Беллмана.

$$k = \begin{pmatrix} 4.03714 & 0.0259314 & 0.00008333 \\ 0.0259314 & 0.0009628 & 3.33651 \cdot 10^{-6} \\ 0.00008333 & 3.33651 \cdot 10^{-6} & 1.97206 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix}$$

Рівняння оптимального регулятора має вигляд:

$$u = -\frac{b}{2c} \frac{\partial V}{\partial x_3} = -\frac{b}{c} (k_{13}x_1 + k_{23}x_2 + k_{33}x_3)$$

Підставивши значення коефіцієнтів маємо:

$$u = -100 \cdot x_1 - 4.00381 x_2 - 0.0236648 x_3$$

Передаточна функція регулятора:

$$W_p(p) = 0.00236648p^2 + 4.00381p + 100$$

Підставивши частинні похідні від четвертинної форми в рівняння (2) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях отримаємо систему з 15ти лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриця коефіцієнтів, отримана в результаті рішення системи в MathCad v.14 записана справа.

$$\alpha_5 + 4K_7 - 4a_2K_{12} = 0$$

$$\alpha_6 + 4K_{14} - 4a_1K_{15} = 0$$

$$4K_1 - 4a_2K_3 = 0$$

$$4K_2 - 4a_1K_3 = 0$$

$$12K_{12} - 12a_2K_5 = 0$$

$$12K_3 + 12K_4 - 12a_1K_5 - 12a_2K_6 = 0$$

$$12K_5 - 12a_1K_6 = 0$$

$$12K_4 - 12a_2K_8 = 0$$

$$24K_5 + 12K_7 - 12a_1K_8 - 24a_2K_9 = 0$$

$$12K_6 + 24K_8 - 24a_1K_9 - 12a_2K_{10} = 0$$

$$12K_9 - 12a_1K_{10} = 0$$

$$12K_8 + 4K_{11} - 4a_1K_{12} - 12a_2K_{13} = 0$$

$$12K_9 + 12K_{12} - 12a_1K_{13} - 12a_2K_{14} = 0$$

$$4K_{10} + 12K_{13} - 12a_1K_{14} - 4a_2K_{15} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 848502.34229227043551 \\ 57698.159275874389615 \\ 0.001767788869552133 \\ 3923.4748307594584938 \\ 144.24539818968597404 \\ 5.3031396393266902219 \\ 263.57028258624796538 \\ 9.8086870768986462345 \\ 0.36061349547421493509 \\ 0.01325784909831672555 \\ 57.751770305887490571 \\ 0.00000214685456846125 \\ 0.008669283032772241851 \\ 0.00015625 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рівняння оптимального регулятора з урахуванням неквадратичного критерію оптимальності має вигляд:

$$u = -\frac{b}{2c} \frac{\partial V}{\partial x_3} = -\frac{b}{c} (k_{13}x_1 + k_{23}x_2 + k_{33}x_3 + 2K_3x_1^3 + 2K_{12}x_2^3 + 2K_{15}x_3^3) =$$

$$= -1200000(0.000083333x_1 + 3.33 \cdot 10^{-6}x_2 + 1.97 \cdot 10^{-6}x_3 + 2 \cdot 0.0017677x_1^3 + 2 \cdot 0.0000021x_2^3 + 2 \cdot 0 \cdot x_3^3)$$

Остаточно:

$$u = -146.05x_1 - 5.6x_2 - 0.0236x_3$$

Дослідимо динаміку замкнутої оптимізованої системи методом цифрового моделювання за допомогою пакета Matlab v.7.

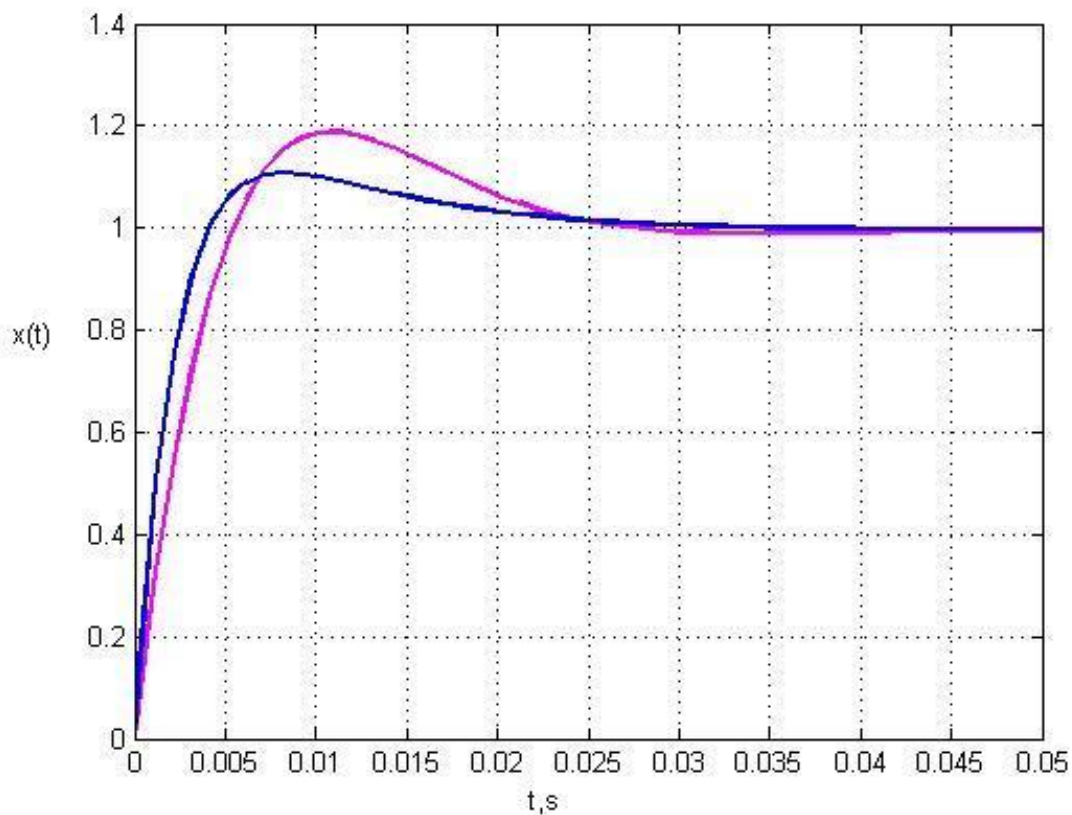


Рисунок 2 – Графіки переходних процесів

В результаті було отримано закон оптимального керування методом Беллмана для не квадратичного критерію оптимальності. Бачимо, що нелінійний регулятор (перехідний процес позначено блакитним) забезпечує кращі показники якості переходного процесу в порівнянні з лінійним.

Перелік посилань

1. Теорія автоматичного керування під редакцією Воронова А.А., том II – М.: Вища школа. 1986.
2. Кудін В.Ф. Теорія оптимального керування. Методичні вказівки, Київ, КПІ, 2001.