

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ВАГОЮ ПАПЕРОВИГОТОВЛЯЮЧОЇ МАШИНИ ЗА ВІДОМОЮ ФУНКЦІЄЮ КОРЕЛЯЦІЇ ФЛУКТУАЦІЇ ВАГИ СУХОГО ПАПЕРУ

Шматок С.О., проф.; Вересюк О.А., магістрант

кафедра автоматизації електромеханічних систем та електроприводу

Відомо, що в природі існують об'єкти для яких достатньо важко провести формалізацію. В даній роботі розглядається об'єкт на який діють стаціонарні стохастичні процеси, за рахунок яких формалізація даного об'єкта ускладнюється. Виходячи із експериментально знятої характеристики кореляції флуктуації ваги сухого паперу пропонується провести апроксимацію цієї залежності та на основі теорії формуючого фільтру отримати математичний опис моделі системи керування вагою сухого паперу.

На рис.1 зображена спрощена схема паперовиготовляючої машини [1], яка містить цифрові регулятори для керування вагою паперу.

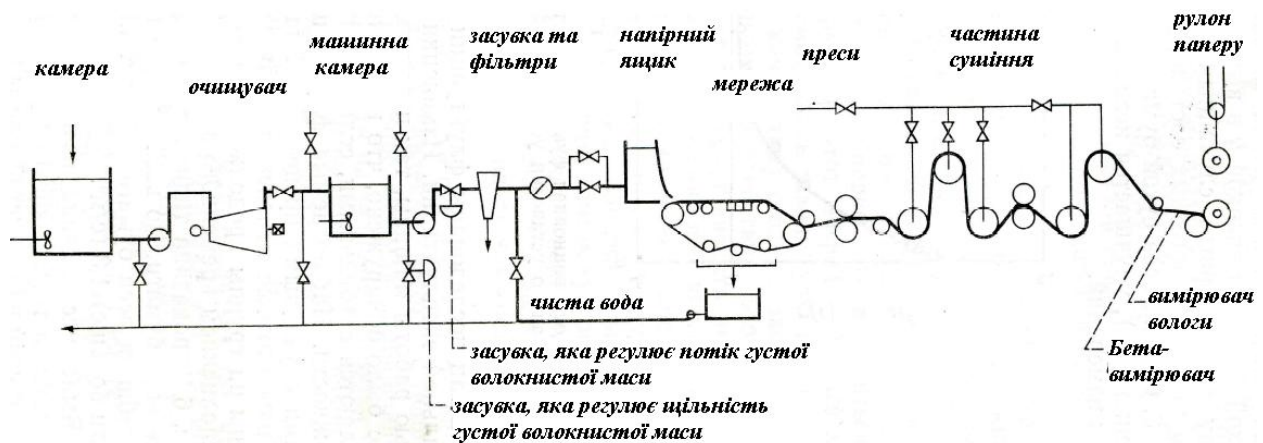


Рисунок 1 - Функціональна схема паперовиготовляючої машини

На основі тривалих експериментальних досліджень у лабораторії фірми ІВМ у Стокгольмі було знято ряд характеристик та залежностей, зокрема коваріаційну функцію для флуктуації ваги сухого паперу, яка була отримана після їх регулювання. Графік цієї функції зображено на рис.2 крива 1.

На основі цієї кореляційної функції, яка характеризує вихідний сигнал системи регулювання вагою сухого паперу, можна визначити частотну та перехідну функцію системи. З цією метою використовуємо метод формуючого фільтру[2].

Оскільки кореляційна функція (рис. 2 крива 1) має деякі коливання, то пропонується виконати апроксимацію цієї кривої аналітичною залежністю $R(\tau)(1)$.

$$R(\tau) = \sigma^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau), \quad (1)$$

Початкове значення коваріації, що дорівнює дисперсії ваги, рівне 0,0729. Ступінь згасання коваріаційної функції (1) визначається співвідношенням величин α та ω_0 . Із графіка експериментально знятої функції флуктуації ваги

сухого паперу приймаємо період гармонічної функції рівним 19,1с , тоді ω_0 розраховується за формулою (2):

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{19,1} = 0.329 \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

За цей час коваріаційна функція практично знижується до нуля, тобто можна прийняти наступну рівність: $\exp(-\alpha|\tau|)=0.0005$, що забезпечує $\alpha|\tau|=3*19,1$. Тому $\alpha=0.4047$. У програмному середовищі пакету прикладних програм Matlab розраховуємо та побудуємо графік (рис.2 крива 2), який відповідає аналітичній залежності (1).

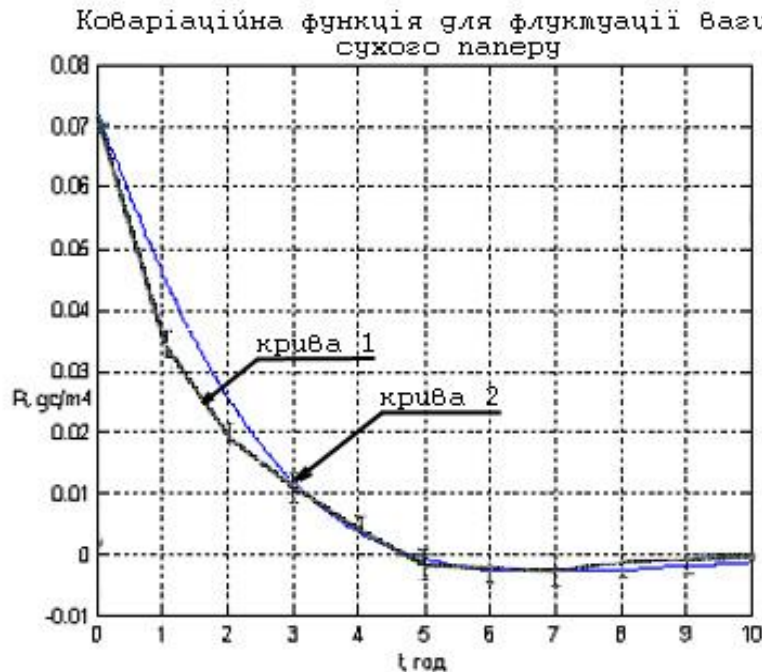


Рисунок 2 - Коваріаційна функція для флуктуації ваги сухого паперу
(1- експериментально визначена, 2- аналітично побудована)

Програма для отримання аналітичного графіку коваріаційної функції ($R(\tau)$):

```
x=[0:0.1:10];
y1=0.0729*exp(-0.4047*x).*cos((0.329)*x);
plot(x,y1) grid on
```

Далі обчислюємо спектральну щільність (3) для обраної коваріаційної функції.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - j\omega\tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) d\tau =$$

$$\sigma^2 \cdot \left[\int_{-\infty}^0 \exp(\alpha\tau - j\omega\tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \cdot d\tau + \int_0^{\infty} \exp(-\alpha\tau - j\omega\tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \cdot d\tau \right],$$

(3)

Враховуючи формулу Ейлера: $\cos(\omega_0 \cdot \tau) = (e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau})/2$, та на основі таблиць Рижика-Гайдштейна маємо (4):

$$S(\omega) = \alpha \cdot \sigma^2 \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right], \quad (4)$$

При цьому частотна характеристика системи буде дорівнювати (5):

$$W(j\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} \cdot \left[\frac{1}{1 + j(\omega - \omega_0)T} + \frac{1}{1 + j(\omega + \omega_0)T} \right], \quad (5)$$

Як видно із (5) система являє собою паралельне з'єднання двох резонансних ланок, які мають резонансні частоти $\pm \omega_0$. Огинаюча цих контурів є аперіодичною ланкою.

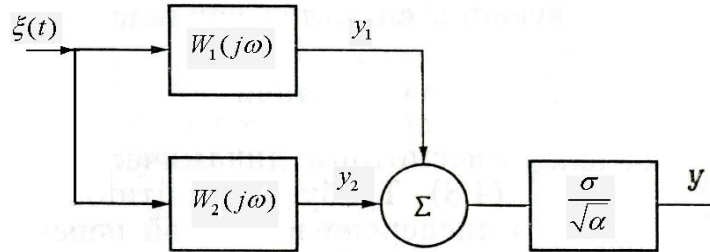


Рисунок 3 – Блок-схема досліджуваної системи та середовища

Для визначення диференційного рівняння необхідно знайти передаточну функцію у вигляді відношення двох поліномів – чисельника та знаменника.

Тоді отримуємо (6):

$$W_1(j\omega) = \frac{2\sigma\sqrt{\alpha}}{\alpha^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{1 + j\omega \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + 2j\omega \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha^2 + \omega_0^2} - \omega^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2 + \omega_0^2}}, \quad (6)$$

Введемо наступні позначення (7):

$$\left\{ k = \frac{2\sigma\sqrt{\alpha}}{\alpha^2 + \omega_0^2}; \quad T_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}; \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}; \quad \zeta = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}}; \right\} \quad (7)$$

та перейдемо до передаточної функції:

$$W_1(p) = \frac{k \cdot (1 + p \cdot T_1)}{1 + 2 \cdot \zeta \cdot p \cdot T_2 + p^2 \cdot T^2} = \frac{X(p)}{U(p)}, \quad (8)$$

На основі (8) отримуємо наступне диференційне рівняння системи (9):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2 \cdot \zeta}{T_2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{T_2^2} \cdot x + \frac{k}{T_2^2} \cdot u(t) + k \cdot \frac{T_1}{T_2^2} \frac{du}{dt}, \quad (9)$$

Або у формі Коші (9'):

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ u(t) = u_1, \\ \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{2 \cdot \zeta}{T_2} \cdot x_2 - \frac{1}{T_2^2} \cdot x_1 + \frac{k}{T_2^2} \cdot u_1 + k \cdot \frac{T_1}{T_2^2} \cdot u_2; \end{array} \right. \quad (9')$$

Введемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_2^2} & -\frac{2 \cdot \zeta}{T_2} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{T_2^2} & k \cdot \frac{T_1}{T_2^2} \end{pmatrix};$$

Тоді рівняння (9') у векторно-матричному вигляді буде (10):

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U, \quad (10)$$

У відповідності до апроксимації дослідження, яке розглядалося у лабораторії м. Гравен – фізичний сенс вхідного та вихідного сигналів із блок-схеми рис.3 наступний:

- 1) сигнал $\xi(t)$ характеризується як стохастичне збурення виду «білий шум», математичне очікування якого рівне 0, а дисперсія 1;
- 2) сигнал U це вихідна функція для флуктуації ваги сухого паперу, яка також враховує кореляцію (регулятор).

В результаті проробленої роботи було здійснено апроксимацію експериментальної характеристики кореляції флуктуації в системі керування виготовленням сухого паперу. Як бачимо із рис.2 вище згадана апроксимація дає достатньо точне відтворення досліджуваної функції. Далі на основі обрахованої спектральної щільності отримана частотна характеристика, за допомогою перетворень якої по методу формуючого фільтру було встановлено математичну модель дослідної системи.

Проведене дослідження є незамінним у тих випадках коли на систему діють стаціонарні стохастичні процеси, в результаті чого отримання математичного опису стає недоступним без проведення додаткових досліджень у системі. Зрозуміло, що при наявності математичної моделі об'єкта – керування ним можна синтезувати для отримання оптимальних показників якості.

Перелік посилань

1. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления // Издательство «Мир», Москва, 1973 г.- С. 174-228.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей // Издательство «Наука», Москва, 1969г.