СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА КУТОВОГО ПОЛОЖЕННЯ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Кудін В.Ф., проф.; Пєтухова Д.І., студентка
кафедра автоматизації електромеханічних систем та електроприводу

В даній роботі буде розглянуто синтез оптимального регулятора кутового положення літального апарату методом динамічного програмування (Беллмана-Ляпунова). Буде сформульований закон оптимального керування з урахуванням неквадратичного критерію оптимальності. В ході дослідження будуть промодельовані перехідні процеси, що виникають в контурі за даного закону керування.

Початкові дані:

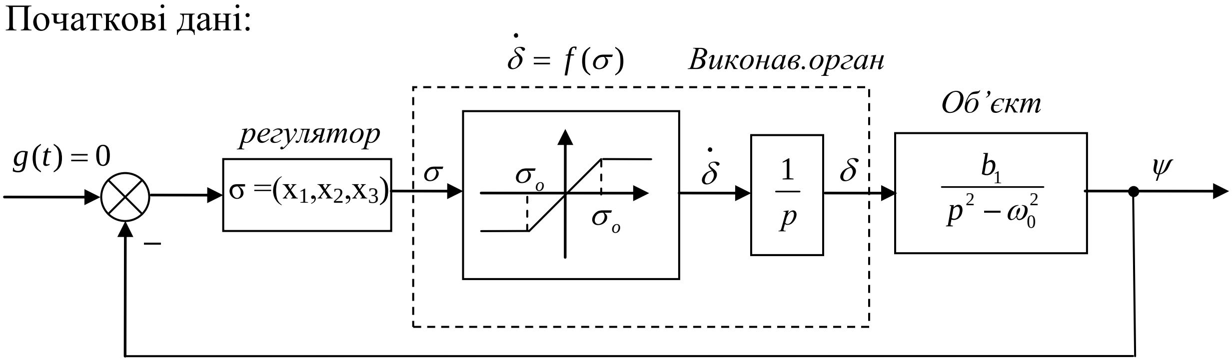

Рисунок 1 – Структурна схема досліджуваної системи

Математична модель:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 + b\delta$$

$$\dot{\delta} = f(\sigma), де\, \dot{\delta} = h_1\sigma - лінеарезована\, модель\, виконавчого\, органу$$

$$h_1 = 0.1$$

Проаналізувавши початкові умови бачимо, що керуючий сигнал залежить від трьох змінних. Ця умова значно ускладнює розрахунок. Тому зменшення громіздкості розрахунків понизимо порядок передаточної функції наступним чином: введемо зворотній зв'язок за контуром сервоприводу(Рисунок 2). Таким чином отримаємо:

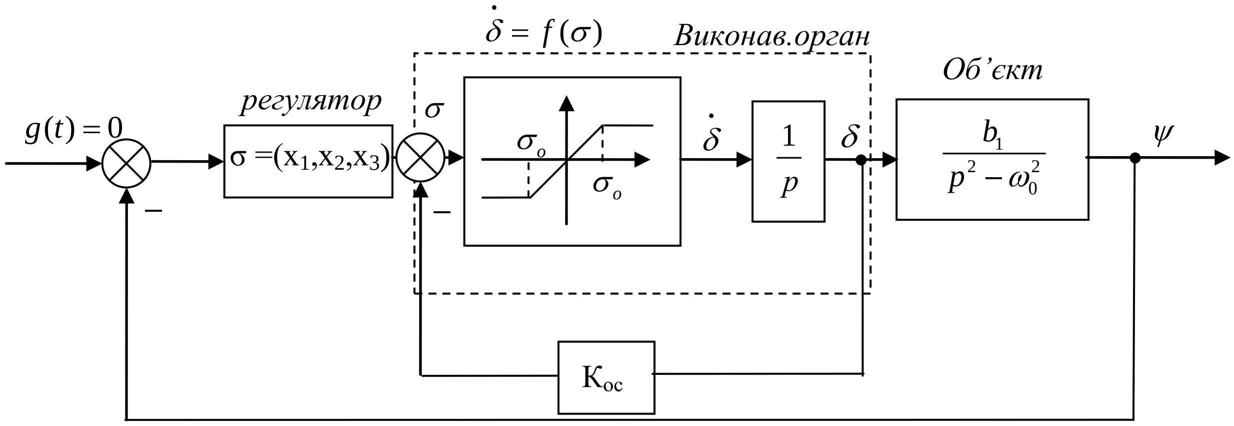

Рисунок 2

Відповідно до перетворень зміниться математична модель. Знайдемо передаточну функцію виконавчого органу, з урахуванням лінеаризації релейної ланки запишемо:

$$W_1 = \frac{\frac{1}{h_1}}{\frac{1}{h_1 K_{oc}} + 1} = \frac{K_1}{T_1 p + 1}$$

Проаналізувавши даний вираз помітимо, що T_1 має більший порядок малості ніж K_1, тому знехтуємо сталою часу та отримаємо наступну передаточну функцію прямого каналу:

$$W(p) = \frac{b_1 K_1}{p^2 - \omega_0^2} = \frac{K}{p^2 - \omega_0^2} = \frac{\psi(p)}{\sigma(p)}$$

Отримаємо матиматичну модель:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 + K\sigma$$

Обираємо критерій оптимальності:

$$\min_{\sigma} I = \int_0^{\infty} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_1^4 + \alpha_4 x_2^4 + c\sigma^2)$$

Складаємо функціональне рівняння Беллмана:

$$\min_{\sigma} \left[\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_1^4 + \alpha_4 x_2^4 + c\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right] = 0$$

Проводимо процедуру мінімізації та отримаємо рівняння Беллмана в замкненому вигляді:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_1^4 + \alpha_4 x_2^4 + c\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \omega_0^2 \frac{\partial V}{\partial x_2} x_1 = \frac{K^2}{4c} \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо в вигляді послідовності степеневих рядів:

$$V(x_1, x_2) = V^{(2)}(x_1, x_2) + V^{(4)}(x_1, x_2); \qquad [1]$$

Квадратична форма (форма другого порядку):

$$V^{(2)}(x_1, x_2) = \sum_{ij=1}^{n} K_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = K_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot K_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + K_{22} \cdot x_2^2$$

Форма четвертого порядку:

$$V^{(4)}(x_1, x_2) = K_{41} \cdot x_1^4 + K_{42} \cdot x_1^3 \cdot x_2 + K_{43} \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 + K_{44} \cdot x_1 \cdot x_2^3 + K_{45} \cdot x_2^4$$

Знайдемо часткові похідні $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}$ для форм другого та четвертого порядку та підставивши їх в рівняння отримаємо систему рівнянь, яка складається з трьох рівнянь Ріккаті та п'яти лінійних рівнянь:

$$\begin{array}{l|l}
x_1^2 & \alpha_1 + 2K_{12} = \frac{K^2 K_{12}^2}{c}; \\
x_2^2 & \alpha_2 + 2\omega_0^2 K_{12} = \frac{K^2 K_{22}^2}{c}; \\
x_1^4 & \alpha_3 + \omega_0^2 K_{42} = \frac{K^2}{c} \cdot K_{12} \cdot K_{42}; \\
x_2^4 & \alpha_4 + K_{44} = \frac{4K^2}{c} \cdot K_{22} \cdot K_{45}; \\
x_1 \cdot x_2 & 2K_{11} + 2\omega_0^2 K_{22} = \frac{2K^2}{c} \cdot K_{12} \cdot K_{22}; \\
x_1^3 \cdot x_2 & 4K_{41} + 2\omega_0^2 K_{43} = \frac{K^2}{c} \cdot \left[2K_{12} \cdot K_{43} + K_{22} \cdot K_{42}\right]; \\
x_1^2 \cdot x_2^2 & 3K_{42} + 3\omega_0^2 K_{44} = \frac{K^2}{c} \cdot \left[2K_{22} \cdot K_{43} + 3K_{12} \cdot K_{44}\right]; \\
x_1 \cdot x_2^3 & 3K_{43} + 4\omega_0^2 K_{45} = \frac{K^2}{c} \cdot \left[3K_{22} \cdot K_{44} + 4K_{12} \cdot K_{45}\right].
\end{array}$$

Знаходимо масові константи, визначивши максимально допустимі значення фазових координат та керуючого впливу при перехідному процесі:

$x_{1m} = 0{,}1$ рад.; $x_{2m} = 0{,}2$ рад/с.; $\sigma_m = 10$ В

$$\alpha_1 = \frac{1}{(x_{1m})^2} = \frac{1}{0{,}1^2} = 100; \ \alpha_2 = \frac{1}{(x_{2m})^2} = \frac{1}{0{,}2^2} = 25; \ \alpha_3 = \frac{1}{(x_{1m})^4} = \frac{1}{0{,}1^4} = 1000;$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{(x_{2m})^4} = \frac{1}{0{,}3^4} = 625; \ c = \frac{1}{(\sigma_m)^2} = \frac{1}{10^2} = 0.01.$$

Отримаємо розв'язки системи такі, щоб вони відповідали умовам знакосталості та задовольняли теоремі Сільвестра, сформулюємо закон керування, який шукаємо в вигляді:

$$\sigma = -\frac{K^2}{4c} \cdot \frac{dV}{dx_2} = -\frac{K^2}{4c} \cdot [2K_{12} \cdot x_1 + 2K_{22} \cdot x_2 + K_{42} \cdot x_1^3 + \quad [2]$$

$$+ 2K_{43} \cdot x_1^2 \cdot x_2 + 3K_{44} \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 4K_{45} \cdot x_2^3];$$

$$\sigma = -\left[50.5 \cdot x_1 + 28 \cdot x_2 + 255 \cdot x_1^3 + 827 \cdot x_1^2 \cdot x_2 + 465.68 \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 277 \cdot x_2^3\right];$$

Промоделюємо перехідні процеси, які виникають в контурі за данного закону керування:

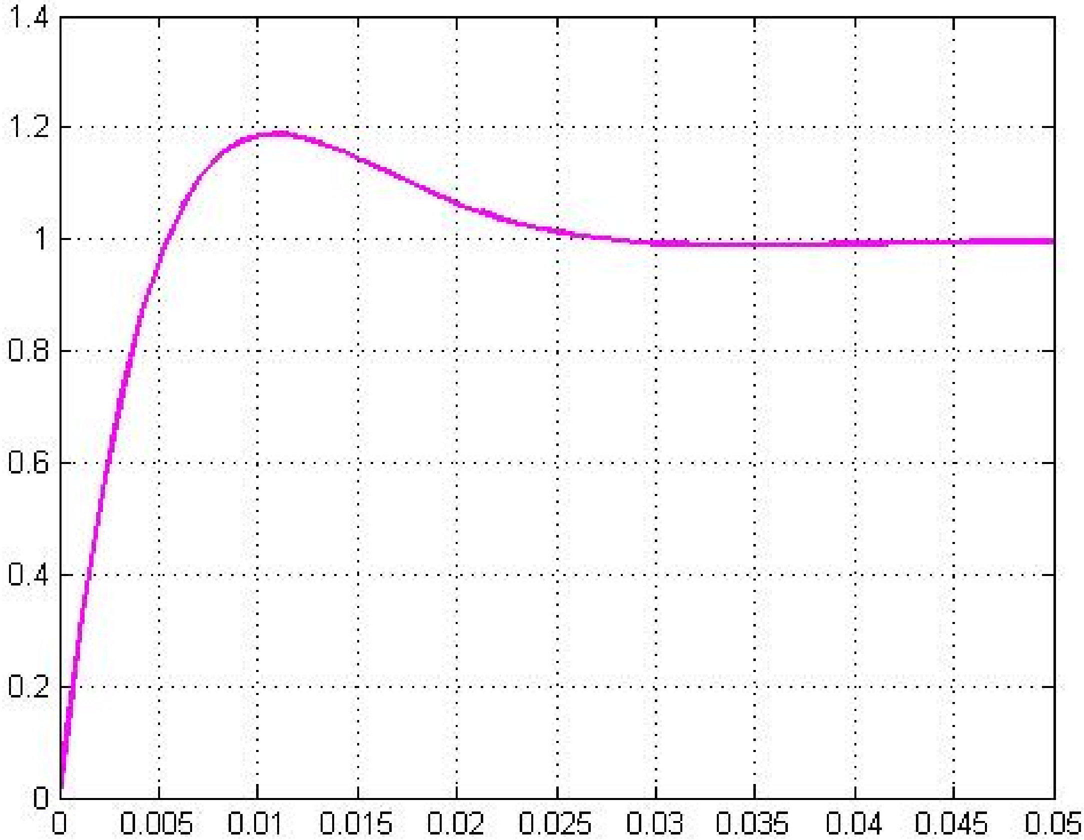

Рисунок 3 – Перехідний процес за положенням

Таким чином був синтезований оптимальний регулятор положення за допомогою метода Беллмана-Ляпунова. Задача ускладнилася тим, що передаточна функція системи має третій порядок. Тому був введений від'ємний зворотній зв'язок за контуром сервоприводу. Порядок малості сталої часу набагато більший за порядок малості коефіцієнту підсилення внутрішнього контуру. Це дозволило знехтувати сталою часу, в результаті чого система стала другого порядку. Була складена система рівнянь, яка визначала коефіцієнти функції Ляпунова та сформульований закон оптимального керування, а змодельований перехідний процес визначив показники якості синтезованого регулятора.

Перелік посилань

1. Теорія автоматичного керування під редакцією Воронова А.А., том II – М.: Вища школа. 1986.
2. Кудін В.Ф. Теорія оптимального керування. Методичні вказівки, Київ, КПІ, 2001.
3. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування – К.: Вища школа. 1996