Практичне заняття № 2

ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНІВ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ ДЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Основні теоретичні положення

Основні закони алгебри логіки, побудовані на застосуванні операцій І, АБО, НІ, зведені в табл.1.

Таблиця 1.

Номер формули	Математичний вираз	Назва закону
1	$0bc...w=0$	Нульової безлічі
2	$1+a+b+c+...+w=1$	Універсальної безлічі
3а 3б	$abc... = bca = ...cba$ $a+b+c+... = b+a+c+...$	Комутативний переставний
4а 4б	$a(bc) = (ab)c = abc$ $a+(b+c) = (a+b)+c$	Асоціативний (сполучний)
5а 5б	$a(b+c) = ab+ac$ $a+bc = (a+b)(a+c)$	Дистрибутивний (розподільний)
6а 6б	$a \cdot a \cdot a...a = a$ $a+a+a+...+a = a$	Повторення (тавтології)
7	$\overline{\overline{a}} = a$	Подвійної інверсії
8	$a\overline{a} = 0$	Логічного протиріччя
9	$a+\overline{a} = 1$	Виключеного третього
10а 10б	$a(a+b)(a+c)...(a+w) = a$ $a+ab+ac+...+aw = a$	Поглинання
11а 11б	$ab+a\overline{b} = a$ $(a+d)(a+\overline{d}) = a$	Склеювання
12а 12б	$ab+\overline{a}c+bc = ab+\overline{a}c$ $(a+b)(\overline{a}+c)(b+c) = (a+b)(\overline{a}+c)$	Узагальненого склеювання
13а 13б	$\overline{a+b+c+...+w} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}...\overline{w}$ $\overline{abc...w} = \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+...+\overline{w}$	Де Моргана

Використовуючи ці закони, можна перетворювати та спрощувати логічні функції. При цьому слід мати на увазі, що всі перелічені закони лишаються справедливими, якщо окремі аргументи в них замінити будь-якими виразами. Наприклад, закон склеювання можна застосувати до виразів:

$$abcd + ab\overline{c}d = abd;$$

$$abcd + ab\overline{cd} = ab;$$

$$(a+b)(c+d) + (a+b)(\overline{c+d}) = a+b.$$

Для визначення інверсії функції зручно використовувати узагальнення законів де Моргана, яке запропоновано Шенноном:

$$\overline{f}(a,b,c,...w,\cdot,+) = f(\overline{a},\overline{b},\overline{c},...,+,\cdot),$$

тобто для визначення інверсії функції достатньо замінити усі аргументи їх інверсіями, усі операції І операціями АБО, а операції АБО – операціями І. Наприклад, якщо

$$f = ab + \overline{c}d + \overline{a}d,$$

то $\overline{f} = (\overline{a} + \overline{b})(c + \overline{d})(a + \overline{d})$,

або якщо $f = (a + \overline{b})(\overline{c} + d) + \overline{b}\,\overline{d}$,

то $\overline{f} = (\overline{a}\,b + c\overline{d})(b + d)$.

Для перетворення і спрощення логічних функцій використовуються також теореми розкладання:

$$f(a,b,c...,w) = af(1,b,c,...,w) + \overline{a}\,f(0,b,c,...,w); \qquad (14)$$

$$f(a,b,c...,w) = \left[a + f(0,b,c,...,w)\right]\left[\overline{a} + f(1,b,c,...,w)\,\right] \qquad (15)$$

Застосуємо формулу (14) для доведення закону узагальненого склеювання в формі (12 а), тобто для спрощення вихідного виразу:

Застосуємо формулу (14) для доведення закону узагальненого склеювання в формі (12 а), тобто для спрощення вихідного виразу:

$$ab + \overline{a}c + bc = a(1\cdot b + 0\cdot c + bc) + \overline{a}(0\cdot b + 1\cdot c + bc)$$
$$= a(b + bc) + \overline{a}(c + bc) = ab + \overline{a}c,$$

тому що $b + bc = b; c + bc = c$ на підставі закону поглинання (10 б).

Для спрощення логічних виразів зручно також застосовувати такі теореми:

$$af(a,\overline{a},b,c,...w) = af(1,0,b,c,...,w); \qquad (16)$$

$$\overline{a}f(a,\overline{a},b,c,...w) = \overline{a}f(0,1,b,c,...,w); \qquad (17)$$

$$a + f(a,\overline{a},b,c,...w) = a + f(0,1,b,c,...,w); \qquad (18)$$

$$\overline{a} + f(a,\overline{a},b,c,...w) = \overline{a} + f(1,0,b,c,...,w). \qquad (19)$$

Розглянемо приклади застосування перелічених законів і теорем алгебри логіки.

Приклад 1. Перевірити справедливість рівності

$$a\overline{b} + c + \overline{a}\ \overline{c}d + b\overline{c}d = c + a\overline{b} + d.$$

Для лівої частини виразу застосуємо теорему (18), тоді отримаємо

$$a\overline{b} + c + \overline{a}\ \overline{c}d + b\overline{c}d = a\overline{b} + c + \overline{a}\cdot 1\cdot d + b\cdot 1\cdot d = a\overline{b} + c + \overline{a}d + bd\ .$$

Використаємо дистрибутивний закон (5а) і закон де Моргана (13 б)

$$a\overline{b} + c + \overline{a}d + bd = a\overline{b} + c + d(\overline{a} + b) = c + a\overline{b} + d\overline{a\overline{b}},$$

після цього застосуємо до двох останніх доданків рівносильність вигляду $a + \overline{a}b = a + b$, яка випливає з теореми (18), тоді остаточно отримаємо

$$c + a\overline{b} + d\,\overline{a\overline{b}} = c + a\overline{b} + d\ .$$

Одержаний вираз збігається з правою частиною вихідної рівності, отже справедливість рівності доведено.

Приклад 2. Перевірити справедливість рівності

$$\overline{a}\ \overline{d} + ad + bc\overline{d} = \overline{a}\ \overline{d} + ad + abc\,.$$

Ліва і права частини цього виразу відрізняються тільки членами $bc\overline{d}$ *і* abc. Тому доповнимо ці члени відсутньою змінною, помноживши член $bc\overline{d}$ на одиницю у вигляді $a + \overline{a}$, а член abc на одиницю у вигляді $d + \overline{d}$, тоді отримаємо

$$\overline{a}\ \overline{d} + ad + bc\overline{d}(a + \overline{a}) = \overline{a}\ \overline{d} + ad + abc(d + \overline{d}),$$

або після відкриття дужок

$$\bar{a}\ \bar{d}+ad+abc\bar{d}+\bar{a}bc\bar{d}=\bar{a}\ \bar{d}+ad+abcd+abc\bar{d}.$$

На підставі закону поглинання (10 б) $\bar{a}\ \bar{d}+\bar{a}bc\bar{d}=\bar{a}\ \bar{d}$ і $ad+abcd=ad$, тому остаточно отримаємо

$$\bar{a}\ \bar{d}+ad+abc\bar{d}=\bar{a}\ \bar{d}+ad+abc\bar{d},$$

тобто ліва і права частини вихідного виразу перетворюються в однакові вирази.

Приклад 3. Перевірити справедливість рівності

$$\bar{a}\ \bar{d}+ad+bc\bar{d}=(a+\bar{d})(\bar{a}+c+d)(\bar{a}+b+d).$$

Будемо перетворювати праву частину заданого виразу. Спочатку відкриємо дужки, враховуючи, що $a\bar{a}=0$ *і* $aa=a,$ тоді отримаємо

$$(a+\bar{d})(\bar{a}+c+d)(\bar{a}+b+d)==(ac+ad+\bar{a}\ \bar{d}+c\bar{d})(\bar{a}+b+d)=$$
$$=abc+acd+abd+ad+\bar{a}\ \bar{d}+\bar{a}b\bar{d}+\bar{a}c\bar{d}+bc\bar{d}.$$

Застосуємо закон поглинання для групи членів цього виразу:

$$ad+acd+abd=ad;$$
$$\bar{a}\ \bar{d}+\bar{a}b\bar{d}+\bar{a}c\bar{d}=\bar{a}\ \bar{d},$$

тоді отримаємо

$$ad+\bar{a}\ \bar{d}+abc+bc\bar{d}.$$

Помножимо член abc на одиницю у вигляді $d+\bar{d}$, тоді отримаємо

$$ad+\bar{a}\ \bar{d}+abc(d+\bar{d})+bc\bar{d}=ad+\bar{a}\ \bar{d}+abcd+abc\bar{d}+bc\bar{d}.$$

Застосуємо закон поглинання для виразів

$$ad+abcd=ad;\ bc\bar{d}+abc\bar{d}=bc\bar{d},$$

тоді остаточно отримаємо

$$ad+\bar{a}\ \bar{d}+bc\bar{d},$$

тобто вираз, який збігається з лівою частиною вихідного виразу.

Приклад 4. Мінімізувати логічну функцію

$$f=d+\bar{d}\,ab+\bar{d}\,\bar{a}c+bc+abcd.$$

Застосуємо теорему (18) і подамо *f* у вигляді

$f = d + ab + \overline{a}c + bc.$

Використавши закон узагальненого склеювання (12 а), отримаємо

$f = d + ab + \overline{a}c.$

Приклад 5. Мінімізувати логічну функцію

$f = (a + \overline{d})(\overline{b} + \overline{d})(a + \overline{d})$.

Застосуємо закон повторення (6 а), відкриємо дужки та застосуємо закон поглинання (10 б), тоді отримаємо

$$f = (a + \overline{d})(\overline{b} + \overline{d})(a + \overline{d}) = (a + \overline{d})(\overline{b} + \overline{d}) = a\overline{b} + a\overline{d} + \overline{b}\,\overline{d} + \overline{d} = a\overline{b} + \overline{d}$$

Завдання для аудиторних занять

Визначити інверсії таких функцій:

$f_1 = (a + \overline{b} + c)(b + \overline{a}d) + \overline{b}\,\overline{d};$

$f_2 = a\overline{b}(c + \overline{b}\,\overline{d});$

$f_3 = \overline{a(\overline{c}d + bd)} + \overline{a}(\overline{c} + d).$

Перевірити справедливість таких рівностей:

$ab + \overline{a}\,\overline{b} + bcd = ab + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}cd;$

$ab + \overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}bc\overline{d} + a\overline{b}\overline{c}d = (a + \overline{d})(b + \overline{c});$

$(a\overline{b} + c)(a + \overline{b})c = (a + \overline{b})c;$

$ab + ad + \overline{a}c + \overline{b}cd = ab + ad + \overline{a}c.$

Мінімізувати логічні функції:

$f_1 = ab + \overline{a}b\overline{c} + bc;$

$f_2 = a\overline{b} + c + (a + \overline{b})c;$

$f_3 = a\overline{b} + c + (\overline{a} + b)\overline{c};$

$f_4 = a + \overline{a}b + \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}d;$

$f_5 = abd + a\overline{b} + a\overline{d} + abc;$

$f_6 = c\overline{d} + a\overline{d} + \overline{a}\overline{d};$

$f_7 = (\overline{a} + \overline{d})(a + \overline{d})(\overline{c} + \overline{d}).$

Завдання для самостійної роботи

Визначити інверсії таких функцій:

$$f_1 = (a + \bar{b}c)(a\bar{b} + c);$$

$$f_2 = (abc + \bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})d + bcd;$$

$$f_3 = \overline{\bar{a} + \bar{b}c} + \bar{a}bc.$$

Перевірити справедливість таких рівностей:

$$\bar{a}\ \bar{c}\,d + \bar{a}cd + abd = \bar{a}d + bd;$$

$$ab + cd = (a + c)(a + d)(b + c)(b + d);$$

$$(a + b)(\bar{a} + c) = ac + \bar{a}b;$$

$$a\bar{b} + b\bar{c} + \bar{a}c = \bar{a}b + \bar{b}c + a\bar{c}.$$

Мінімізувати логічні функції:

$$f_1 = ab + abc + bc;$$

$$f_2 = (a\bar{b} + c)(a + \bar{b})c;$$

$$f_3 = (a\bar{b} + c)(\bar{a} + b)\bar{c};$$

$$f_4 = (a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{a})(abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c});$$

$$f_5 = ad + ab + \bar{a}c + \bar{b}cd.$$